

令和 5 年度 【 学園研究費助成金 < B > 】 研究成果報告書

学 部 名 教育学部

フリガナ イトウジンイチ
氏 名 伊藤 仁一

研究期間 令和 5 年度

研究課題名 直観幾何学を用いた数学の面白さを伝える探究活動の実践

研究組織

	氏 名	学 部	職 位
研究代表者	伊藤 仁一	教育学部	教授

1. 本研究開始の背景や目的等 (200 字～300 字程度で記述)

昨今、最先端の数学の研究は極めて抽象化しており、学校教育の数学で扱える内容との乖離が大きくなっている。しかし、学校現場では探究活動が求められており、学校教育でも扱えるような数学の研究分野の開拓が望まれる。そのような分野の一つとして申請者は、ここ 15 年ほど毎年、研究会「直観幾何学」を開催して、その乖離を埋める研究分野の開拓を試みてきた。具体的な図形に関する問題で、学問的にも未解決問題にも繋がり意味のある研究を意識的に行ってきた。

ここでは、直観幾何学の研究のみでなく、その成果を高等教育や中等教育の教材として扱う可能性を示すとともに、学校現場と連携して教材開発を行い、数学教育に役立てることを目指す。

また、数学というと一般的には難しく敬遠されがちであるため、その面白さを伝える活動が必要である。

2. 研究の推進方策 (300 字程度で記述)

毎月の Zoom での研究会を続ける中で、直観幾何学といえるような中高の先生方の取り組みのレベルを向上させることに務めた。

12 月上旬に学外協力者の堀尾先生に椋山女学園大学を招聘し、単位正方形の紙で包める凸多面体の研究を進めるとともに、GeoGebra や GC 等の動的幾何ソフトを使う教材開発に関する議論を学生も交えて行なった。(予定が合わず、残念ながら椋山中高の先生方には、その時はご参加いただけなかった。)

堀尾先生を始め、當房先生、宇治野先生等を訪問することで、更に、多様な直観幾何学的な研究活動を広めることに努めた。

研究会「直観幾何学 2024」を例年より少し規模を拡大して 3 月 2 日 3 日に開催予定である。

3. 研究成果の概要 (600字～800字程度で記述)

最大の成果は、「直観幾何学 2024」における中高の先生の発表が4件あり、昨年に比べて倍増した。個別の研究課題の一部に関して以下に述べる。

単位正方形の紙で包める体積最大の凸体は辺の比が $2:2:1$ の直方体ではないかとの予想に至った。等周問題等では最大体積ととることが多い球体より大きいことが分かり、直方体や正四角錐台のなかでは、辺の比が $2:2:1$ の直方体が最大体積であることを示した。また、凸体という仮定を外すと、上記の直方体の短い4辺に、余った直角二等辺三角形の紙で包むことができる立体を付けることができ、これは、正方形の場合は **tea bag problem** とされる未解決問題の直角二等辺三角形の場合のある種の制限付きの問題とも言え、更に興味深い問題と関わることが分かった。また、立体の形状を正四面体や正八面体と仮定した場合も最大体積の予想はあるが、それが最大であることの証明には至っていない。また、円柱や円錐と仮定しての最大体積も興味深い問題であり、今後の進展が期待される。

平面幾何の定理や平面の2次曲線の性質に関しては、古くから非常に多くのことが知られているが、球面上でそれらに対応する定理や性質がどのように成り立つのかは、あまり知られていない。平面幾何のフェルマー点を球面上で考えると、そのような点の存在は言えるが、どのような時に三角形の内点になるかに関しては、複雑であり、特別な条件の時に分かった。アポロニウスの円に関しても、球面上で2点からの距離の比が $1:2$ の場合は球面上の円ではなく、ある方程式で表せることが分かった。球面上で大円と極から等距離の曲線は極と他の1点からの距離の和（または差）が一定であり、球面上の楕円（双曲線）と言え。また離心率が1でない曲線は2点からの距離の和（差）が一定ではないことも分かった。

これらの結果を中高の現場での教材化はまだ出ていないが、まずは中高の先生方が探究活動を体験されることには大いに役立ったと言える。

4. キーワード (本研究のキーワードを1項目以上8項目以内で記載)

① 直観幾何学	② 正方形で包む	③ フェルマー点	④ 球面上の楕円
⑤ 探究活動	⑥ 動的幾何ソフト	⑦	⑧

5. 研究成果及び今後の展望 (公開した研究成果、今後の研究成果公開予定・方法等について記載すること。既に公開したものについては次の通り記載すること。著書は、著者名、書名、頁数、発行年月日、出版社名を記載。論文は、著書名、題名、掲載誌名、発行年、巻・号・頁を記載。学会発表は発表者、発表標題、学会名、発表年月日を記載。著者名、発表者名が多い場合には主な者を記載し、他〇名等で省略可。発表数が多い場合には代表的なもののみ数件を記載。)

研究会「直観幾何学 2024」で堀尾先生の「正方形の紙で包める最大凸体」、當房先生の「球面上のフェルマー点、2次曲線、アポロニウスの円」、宇治野先生の「3つの三角形の等積問題」、井上先生の「2次曲線の焦点を通る弦を直径とする円の包絡線について」という4つの講演において発表が予定されている。

正方形の紙で包む問題に関しては、他の直観幾何学の問題とあわせて、その一部を以下の論文として研究発表する。

N.Horio, J.Itoh 他: Six Problems in Intuitive Geometry, Bull. Math. Soc. Roumania, (2024) 巻ページ未定

今後の研究の進展が期待される課題が大変多く、また、中高の教材化の検討についても次年度以降の研究継続が望まれる。